第3講　ベクトル

1 平面上に △OAB と点 C がある．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，内積に関する等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $OB\perp CA$，$OC\perp AB$ が成り立つことを示せ．ただし，点 C は 3 点 O，A，B と異なるものとする．

(2) 点 D を $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$ が成り立つ点とする．このとき，点 D は三角形 OAB の外心であることを示せ．

(3) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\cos\angle AOB=\dfrac{1}{3}$ とする．

(i) $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ が成り立つような x，y の値を求めよ．

(ii) t を $0<t<1$ を満たす実数とし，辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を E とする．3 点 O，C，E が一直線上にあるとき，t の値を求めよ．

2 座標空間内の3点O(0, 0, 0), A(3, 0, 4), B(1, −2, 2)を通る平面をαとする．α上にない2点C, Dは次を満たす．

(i) 点C, Dは平面αに関して同じ側にある．

(ii) 点Cからαに垂線CEを下ろすと，半直線OEは角AOBの二等分線であり，辺ABと点Gで交わる．点GはOEを3：1に内分する．

(iii) 点Dからαに垂線DFを下ろすと，半直線AFは辺OBと点Hで交わる．点Hは辺OBを1：2に内分する．

(iv) CE＝2DF

定数kを$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AH}$となるようにとる．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OG}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$を用いて表し，点Gの座標を求めよ．

(2) 平面αに垂直なベクトルで，長さが$\sqrt{26}$となるものを1つ求めよ．

(3) 点Cから平面α上の点を通り点Dへ行く最短経路がある．このときに通る平面α上の点をPとする．$\overrightarrow{OP}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$およびkを用いて表せ．

(4) (3)において，点Pが△OABの内部にあるためのkの値の範囲を求めよ．

3　O を原点とする座標空間に 3 点 A(1, −1, 2), B(2, 1, −1), C(−1, 2, 1) がある．点 P は $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (s, t は実数) を満たすものとする．次の問いに答えよ．

(1)　3 点 A, B, C は同一直線上にないことを示せ．

(2)　3 点 A, B, C が定める平面を α とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が平面 α と垂直になるときの点 P を P_1 とする．このとき，点 P_1 の座標を求めよ．

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の大きさが最小になるときの点 P を P_2 とする．このとき，点 P_2 の座標を求めよ．

(4)　上の(2)で定めた平面 α と，(3)で定めた点 P_2 を考える．直線 OP_2 と平面 α の交点 Q の座標を求めよ．

第3講　ベクトル

1 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ より

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

また，$\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$ はいずれも $\vec{0}$ ではない．したがって $OB\perp CA$, $OC\perp AB$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ とおくと，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$ より

$$|\overrightarrow{OD}|^2=\frac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{c}-2\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=-\dfrac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}-\vec{b})$ より，

$$|\overrightarrow{AD}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=-\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$ より，

$$|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{4}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-2k)$$

したがって，$|\overrightarrow{OD}|=|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|$ より，D は △OAB の外心である．

(3) (i) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB=2\times3\times\dfrac{1}{3}=2$

よって $\vec{b}\cdot\vec{c}=2$ より $\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=2$　　$2x+9y=2$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=2$ より $(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{a}=2$　　$4x+2y=2$ つまり $2x+y=1$

したがって，$x=\dfrac{7}{16}$，$y=\dfrac{1}{8}$

(ii) 点 E は辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点より，

$\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{OC}=\dfrac{7}{16}\vec{a}+\dfrac{1}{8}\vec{b}$ であり，点 E は直線 OC 上の点より

$\overrightarrow{OE}=s\overrightarrow{OC}=\dfrac{7}{16}s\vec{a}+\dfrac{1}{8}s\vec{b}$ となる実数 s がある．

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は1次独立より，$1-t=\dfrac{7}{16}s$，$t=\dfrac{s}{8}$　　よって　$s=\dfrac{16}{9}$，$t=\dfrac{2}{9}$

2 (1)　$OA=\sqrt{3^2+0^2+4^2}=5$

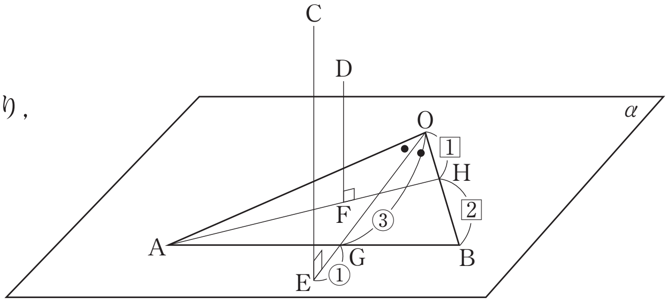
$OB=\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$

OG は ∠AOB の二等分線より，

AG：GB＝OA：OB＝5：3

よって

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}$



$=\dfrac{3}{8}(3,\ 0,\ 4)+\dfrac{5}{8}(1,\ -2,\ 2)=\left(\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{5}{4},\ \dfrac{11}{4}\right)$

したがって $G\left(\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{5}{4},\ \dfrac{11}{4}\right)$

(2)　求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$\vec{n}\cdot\vec{a}=0$ より $3x+4z=0$　　よって $z=-\dfrac{3}{4}x$

$\vec{n}\cdot\vec{b}=0$ より $x-2y+2z=0$　　よって，$y=-\dfrac{1}{4}x$

したがって，$\vec{n}=\left(x,\ -\dfrac{1}{4}x,\ -\dfrac{3}{4}x\right)=x\left(1,\ -\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right)$

$|\vec{n}|=\sqrt{26}$ より $|x|\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{26}$　　$\dfrac{\sqrt{26}}{4}|x|=\sqrt{26}$

よって $x=\pm4$

したがって求めるベクトルの 1 つは $4\left(1,\ -\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right)=(4,\ -1,\ -3)$

(3)　平面 α に関して点 C と対称な点を C′ とすると，平面上の任意の点 Q に関して

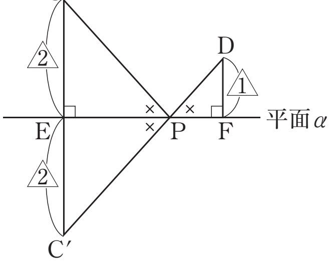
$CQ=C'Q$

よって，$CQ+QD=C'Q+QD\geqq C'D$

等号成立は，C′，Q，D が一直線上に並ぶときで，このときの平面 α 上の点 Q が点 P である．

右図より P は EF を 2：1 に内分する点であり，

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OF}$



$\overrightarrow{OE}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{OG}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{3}{8}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}$

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AH}$ $(k>0)$ より

$\overrightarrow{OF}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OH}$

$=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\cdot\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}=(1-k)\vec{a}+\dfrac{k}{3}\vec{b}$

よって，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{5}{6}\vec{b}\right)+\dfrac{2}{3}\left\{(1-k)\vec{a}+\dfrac{k}{3}\vec{b}\right\}$

$=\left(\dfrac{5}{6}-\dfrac{2}{3}k\right)\vec{a}+\left(\dfrac{5}{18}+\dfrac{2}{9}k\right)\vec{b}$

(4)　(3)より，点Pが△OABの内部にあるための条件は

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}k>0 \quad \text{かつ} \quad \frac{5}{18}+\frac{2}{9}k>0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{5}{6}-\frac{2}{3}k\right)+\left(\frac{5}{18}+\frac{2}{9}k\right)<1$$

$k<\frac{5}{4}$　かつ $k>-\frac{5}{4}$　かつ $k>\frac{1}{4}$　　したがって，$\frac{1}{4}<k<\frac{5}{4}$

3 (1)　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ -3)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 3,\ -1)$

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$（$k$は実数）と仮定すると，$1=-2k$，$2=3k$，$-3=-k$

これらをすべて満たす実数kは存在しない．よって，3点A，B，Cは同一直線上にない．

(2)　$\overrightarrow{OP}\perp$(平面α)となるのは$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　かつ$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$のとき．

ここで，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-t)\overrightarrow{OC}=s\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+\overrightarrow{OC}$

$=s(1,\ -1,\ 2)+t(3,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 1)$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$より$(1-2-6)s+(3-2+6)t+(-1+4-3)=0$　よって$-7s+7t=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$より$(-2-3-2)s+(-6-3+2)t+(2+6-1)=0$

よって$-7s-7t+7=0$

よって，$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{2}$

このとき$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(1,\ -1,\ 2)+\frac{1}{2}(3,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 1)=(1,\ 1,\ 1)$より

$P_1(1,\ 1,\ 1)$

(3)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{CB}$より，点Pは，点Cを通り$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{CB}$が張る平面上にある．

よって，$|\overrightarrow{OP}|$が最小になるときの点Pに関して

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$かつ$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CB}=0$が成り立つ．

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$より$(1+1+4)s+(3+1-4)t+(-1-2+2)=0$　よって$s=\frac{1}{6}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CB}=0$より$(3+1-4)s+(9+1+4)t+(-3-2-2)=0$　よって$t=\frac{1}{2}$

このとき$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{6}(1,\ -1,\ 2)+\frac{1}{2}(3,\ -1,\ -2)+(-1,\ 2,\ 1)=\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

より$P_2\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

(4)　$\overrightarrow{OP_2}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(2,\ 4,\ 1)$より，$\overrightarrow{OQ}=l(2,\ 4,\ 1)$（$l$は実数）と表される．

また，点Qは平面α(平面ABC)上の点より，実数m，nを用いて

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=(1,\ -1,\ 2)+m(1,\ 2,\ -3)+n(-2,\ 3,\ -1)$

と表される．

よって，$2l=1+m-2n$，$4l=-1+2m+3n$，$l=2-3m-n$

これらより，$l=\frac{2}{7}$，$m=\frac{3}{7}$，$n=\frac{3}{7}$

したがって$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{7}(2,\ 4,\ 1)=\left(\frac{4}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{2}{7}\right)$より，$Q\left(\frac{4}{7},\ \frac{8}{7},\ \frac{2}{7}\right)$